

Koordinatentransformationen

1 Formeln

1.1 verwendete Symbole

- geographische Koordinaten auf dem Ellipsoid B, L
- Längendifferenz zum Bezugsmeridian $l = L - L_0$
- ebene Koordinaten $R, H(= y, x)$
- isometrische Breite q
- Index $_0$: Koordinatennullpunkt des Systems
- Maßstabsfaktor m_0
- Halbachsen a, b
- numerische Exzentrizität $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
- sonstige abgeleitete Größen: $n = \frac{a-b}{a+b}$
- $\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 B \quad t = \tan B$
- $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \quad V = W \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$
- Querkrümmung $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$
- $E =$ Basis des natürlichen Logarithmus

1.2 isometrische Breite auf dem Ellipsoid

- isometrische Breite aus geographischer Breite

$$q = \ln \left(\left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \right) \quad (1)$$

- geographische Breite aus isometrischer Breite
iteratives Verfahren:

$$\text{1. Näherung:} \quad B_n = 2 \arctan(E^q) - \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\text{Iterationen:} \quad B_n = 2 \arctan \left(\frac{E^q}{\left(\frac{1 - e \sin B_n}{1 + e \sin B_n} \right)^{\frac{e}{2}}} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

1.3 Gauß-Krüger-/UTM-Koordinaten

- Meridianbogenlänge:

$$G = \frac{a}{1+n} \left(\left(1 + \frac{n^2}{4} \right) B - \frac{3}{2} \left(n - \frac{n^3}{8} \right) \sin 2B + \frac{15}{16} n^2 \sin 4B - \frac{35}{48} n^3 \sin 6B \right) \quad (4)$$

- Fußpunktsbreite:

$$1. \text{ Näherung: } B_{f_0} = G \frac{1+n}{a \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} \right)} \quad (5)$$

$$B_f = B_{f_0} + \frac{3}{2} \left(n - \frac{9}{16} n^3 \right) \sin 2B_{f_0} + \frac{21}{16} n^2 \sin 4B_{f_0} + \frac{151}{96} n^3 \sin 6B_{f_0} \quad (6)$$

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$\begin{aligned} H = m_0 & \left(G + \frac{Nt}{2} l^2 \cos^2 B + \frac{Nt}{24} (5 - t^2 + 9\eta^2) l^4 \cos^4 B \right. \\ & \left. + \frac{Nt}{720} (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) l^6 \cos^6 B \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R = y_0 + 10000000kz + m_0 & \left(Nl \cos B + \frac{N}{6} (1 - t^2 + \eta^2) l^3 \cos^3 B \right. \\ & \left. + \frac{N}{120} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) l^5 \cos^5 B + \frac{N}{5040} (61 - 479t^2 + 179t^4) l^7 \cos^7 B \right) \end{aligned} \quad (8)$$

- Berechnung geographischer Koordinaten:

$$G = \frac{H}{m_0} \Rightarrow B_f \quad \text{und} \quad y = (R - y_0 - 10000000kz)/m_0 \quad (9)$$

$$B = B_f - \frac{t}{2} (1 + \eta^2) \frac{y^2}{N^2} + \frac{t}{24} (5 + 3t^2 + 6\eta^2 - 6t^2\eta^2) \frac{y^4}{N^4} + \frac{t}{720} (61 + 90t^2 + 45t^4) \frac{y^6}{N^6} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L = L_0 + \frac{1}{\cos B} \frac{y}{N} - \frac{1}{6 \cos B} (1 + 2t^2 + \eta^2) \frac{y^3}{N^3} + \frac{1}{120 \cos B} (5 + 28t^2 + 24t^4) \frac{y^5}{N^5} \\ - \frac{1}{240 \cos B} (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6) \frac{y^7}{N^7} \end{aligned} \quad (11)$$

1.4 konforme Lambertkoordinaten (1 Breitenkreis)

- Konstante:

$$R_0 = m_0 \frac{N}{\tan B_0} \quad (12)$$

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$r = R_0 E^{-\sin B_0 (q - q_0)} \quad (13)$$

$$\gamma = l \sin B_0 \quad (14)$$

$$R = y_0 + r \sin \gamma \quad (15)$$

$$H = x_0 + R_0 - r \cos \gamma \quad (16)$$

$$(17)$$

- Berechnung geographischer Koordinaten

$$y = R - y_0 \quad (18)$$

$$x = H - x_0 - R_0 \quad (19)$$

$$L = L_0 - \frac{\arctan \frac{y}{x}}{\sin B_0} \quad (20)$$

$$q = q_0 - \frac{\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R_0}}{\sin B_0} \quad (21)$$

$$(22)$$

1.5 schiefachsige Merkatorprojektion

- Konstanten:

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\tan B_0}{V} \quad (23)$$

$$\alpha = \frac{V \cos B_0}{\cos \varphi_0} \quad (24)$$

$$k = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2})}{E^{\alpha q_0}} \quad (25)$$

$$R_0 = m_0 \frac{b}{W^2} \quad (26)$$

- Berechnung ebener Koordinaten:

1. Schritt: Ellipsoid $\Rightarrow$ Kugel:

$$\lambda = \alpha l \quad (27)$$

$$\varphi = 2 \arctan(k E^{\alpha q}) - \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

2. Schritt: Kugel $\Rightarrow$ Ebene:

$$\lambda_r = \arctan \frac{\sin \lambda}{\sin \varphi_0 \tan \varphi + \cos \varphi_0 \cos \lambda} \quad (29)$$

$$\varphi_r = \arcsin(\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda) \quad (30)$$

$$R = R_0 \lambda_r + y_0 \quad (31)$$

$$H = R_0 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_r}{2} \right) + x_0 \quad (32)$$

- Berechnung geographischer Koordinaten:

1. Schritt: Ebene $\Rightarrow$ Kugel:

$$\lambda_r = \frac{R - y_0}{R_0} \quad (33)$$

$$\varphi_r = 2 \arctan E^{\frac{H - x_0}{R_0}} - \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

$$\varphi = \arcsin(\cos \varphi_0 \sin \varphi_r + \sin \varphi_0 \cos \varphi_r \cos \lambda_r) \quad (35)$$

$$\lambda = \arcsin \frac{\cos \varphi_r \sin \lambda_r}{\cos \varphi} \quad (36)$$

2. Schritt: Kugel $\Rightarrow$ Ellipsoid:

$$L = L_0 + \frac{\lambda}{\alpha} \quad (37)$$

$$q = \frac{\ln \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{k}}{\alpha} \quad (38)$$

1.6 Soldner-Koordinaten

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$H = G - G_0 + x_0 + m_0 \left(\frac{N}{2} l^2 \sin B \cos B + \frac{N}{24} (5 - t^2 + 5\eta^2) l^4 \sin B \cos^3 B \right) \quad (39)$$

$$R = y_0 + m_0 \left(N l \cos B - \frac{N}{6} l^3 \sin^2 B \cos B - \frac{N}{120} (8 - t^2) l^5 \sin^2 B \cos^3 B \right) \quad (40)$$

- Berechnung geographischer Koordinaten

$$G = G_0 + H \quad \Rightarrow \quad B_f$$

$$B = B_f - \frac{1 + e^2}{1 - e^2} t \cos^2 B \left(\frac{y^2}{2N^2} - \frac{1}{24} (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9t^2 \eta^2) \frac{y^4}{N^4} \right) \quad (41)$$

$$L = L_0 + \frac{1}{\cos B} \frac{y}{N} - \frac{1}{3 \cos B} t^2 \frac{y^3}{N^3} + \frac{1}{15 \cos B} t^2 (1 + 3t^2) \frac{y^5}{N^5} \quad (42)$$

1.7 Ellipsoidübergang

- Umrechnung geographischer Koordinaten in kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned} X &= N \cos B \cos L \\ Y &= N \cos B \sin L \\ Z &= N(1 - e^2) \sin B \end{aligned} \quad (43)$$

- Ellipsoidübergang

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \beta \cos \gamma \\ a_{12} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ a_{13} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ a_{21} &= -\cos \beta \sin \gamma \\ a_{22} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ a_{23} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ a_{31} &= \sin \beta \\ a_{32} &= -\sin \alpha \cos \beta \\ a_{33} &= \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (44)$$

Vom Eingabesystem ins Bezugssystem:

$$\begin{aligned} P_T &= \Delta p + M \cdot D \cdot P_A \\ \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + (1 + m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

sowie umgekehrt vom Bezugssystem ins Ausgabesystem

- Kartesisch zu geographisch

$$\begin{aligned} e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \\ s &= \sqrt{(X^2 + Y^2)} \\ \Theta &= \arctan \frac{Za}{sb} \\ B &= \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \Theta}{s - e^2 a \cos^3 \Theta} \\ L &= \arctan \frac{Y}{X} \end{aligned} \quad (46)$$

- Datumsparameter in der Datei bezogen auf WGS 72